# ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

05/11/2018

**Παράδειγμα:** Κάθε κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με σταθερή καμπυλότητα $k>0$ και σταθερή στρέψη $\tau \neq 0$, είναι κυλινδρική έλικα.

$$\left( k = \frac{a}{a^2+b^2},\ \tau = \frac{b}{a^2+b^2} \right)$$

**Άσκηση:** Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$c(t) = (t - \sqrt{3}\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}t + \sin t)$.

i) Να αποδειχθεί ότι είναι κανονική και να βρεθεί η εφαπτόμενη ευθεία της, για $t=\pi$.

ii) Να βρεθεί το μήκος $L_1^4(c)$

iii) Να βρεθεί το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$

iv) Να υπολογιστούν η καμπυλότητα και η στρέψη της.

v) Να βρεθεί το πλαίσιο Frenet.

vi) Είναι καμπύλη σταθερής κλίσης

vii) Είναι επίπεδη;

**Λύση**

i) Η $c$ είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (1 - \sqrt{3}\cos t,\ -2\sin t,\ \sqrt{3} + \cos t)$

$\|c'(t)\| = \sqrt{4 + 4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$

Άρα η $c$ είναι κανονική.

Η εφαπτόμενη ευθεία στο $t_0 = \pi$ έχει διανυσματική εξίσωση

$\vec{r} = c(\pi) + \lambda c'(\pi),\ \lambda \in \mathbb{R}$

$c(\pi) = \ldots,\quad c'(\pi) = \ldots$

ii) $L_1^4(c) = \int_1^4 \|c'(t)\| dt = \int_1^4 2\sqrt{2}\, dt = 6\sqrt{2}$

iii) Το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0=0$ είναι η συνάρτηση $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $s=s(t)=\int_0^t \|c'(u)\|du$

$\Rightarrow$ $s=2\sqrt{2}\,t$ , $t=\frac{s}{2\sqrt{2}}$ , $-\infty<s<+\infty$

iv) Η αναπαραμέτρηση της $c$ με το μήκος τόξου είναι

$$c(s)=\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{3}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\ 2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}s+\sin\frac{s}{2\sqrt{2}}\right),\ s\in\mathbb{R}$$

$\kappa(s)=\|\ddot{c}(s)\|=\dots=\frac{1}{4}>0,\ \forall s\in\mathbb{R}$. Συνεπώς ορίζονται το πλαίσιο Frenet και η στρέψη $\tau(s)=\frac{[\dot{c}(s),\ddot{c}(s),\dddot{c}(s)]}{\kappa^2(s)}=\dots=\frac{1}{4}$

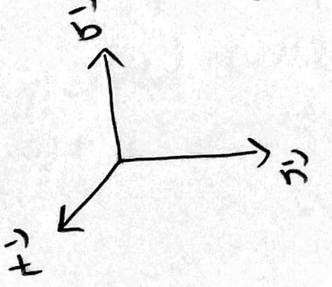
$$\kappa(t)=\frac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3},\quad \tau(t)=\frac{[c'(t),c''(t),c'''(t)]}{\|c'(t)\times c''(t)\|^2}$$

<u>Πλαίσιο Frenet</u>: $\vec{t}(s)=\dot{c}(s)\dots$ , $\vec{n}(s)=\frac{\ddot{c}(s)}{\kappa(t)}=4\ddot{c}(s)=\dots$

$$\vec{b}(s)=\vec{t}(s)\times\vec{n}(s)$$

Το πλαίσιο Frenet ως προς την παράμετρο $t$ είναι:

$$\vec{t}(t)=\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}=\dots,\quad \vec{b}(t)=\frac{c'(t)\times c''(t)}{\|c'(t)\times c''(t)\|}$$




, $\vec{n}(t)=\vec{b}(t)\times\vec{t}(t)$

vi) $\frac{\tau}{\kappa}=1=\cot\varphi \Rightarrow$ Η $c$ είναι καμπύλη σταθερής κλίσης

$\varphi=\frac{\pi}{4}$ , $w=\cos\varphi\,\vec{t}+\sin\varphi\,\vec{b}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

**Άσκηση)** Να αποδειχθεί ότι η καμπύλη $c(t)=(t, t^2, 2t^2-t+1)$, $t\in\mathbb{R}$ είναι επίπεδη και να βρεθεί το επίπεδό της.

**Λύση**

Η $c$ είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t)=(1,2t,4t-1)$
$\neq (0,0,0)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Άρα είναι κανονική καμπύλη.

$$c''(t)=(0,2,4)$$

Η καμπυλότητα της $c$ είναι συνάρτηση $\kappa(t)=\dfrac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}$

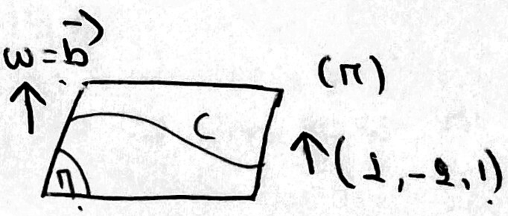
$$c'(t)\times c''(t)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2t & 4t-1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=(8t-8t+2,-4,2)$$

$$c'(t)\times c''(t)=(2,-4,2)\neq 0 \Rightarrow \kappa(t)>0, \forall t\in\mathbb{R}$$

Άρα ορίζεται η στρέψη και είναι: $\tau(t)=\dfrac{[c'(t),c''(t),c'''(t)]}{\|c'(t)\times c''(t)\|^2}$

$=0$

$\xrightarrow{\text{Από γνωστή πρόταση}}$ η $c$ είναι $\underline{\text{επίπεδη}}$




$$\vec{b}(t)=\frac{c'(t)\times c''(t)}{\|c'(t)\times c'(t)\|}$$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου θα είναι:

$$\boxed{(\pi): 1(x-0)-2(y-0)+1(z-1)=0}$$

**Άσκηση:** Δίνεται η καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με $c(t)=(a\cos t, a\sin t, f(t))$ $t\in\mathbb{R}$, όπου $a>0$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λεία συνάρτηση.
Να εξετασθεί εάν υπάρχουν (και αν υπάρχουν να βρεθούν όλες) οι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε η $c$ να είναι επίπεδη.

Λύση

Η $c$ είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας

$$c'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ f'(t))\neq(0,0,0)$$

Άρα η $c$ είναι κανονική.

$$c''(t)=(-a\cos t,\ -a\sin t,\ f''(t))$$

$$c'(t)\times c''(t)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & a\cos t & f'(t) \\ -a\cos t & -a\sin t & f''(t)\end{vmatrix}$$

$$=\left(a\cos t\, f''(t)+a\sin t\, f'(t),\ -(a\sin t\, f''(t)+a\cos t\, f'(t)),\ a^2\right)$$

$$\neq(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \kappa(t)=\frac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$ Άρα ορίζεται

η στρέψη $\tau$ με $$\tau(t)=\frac{[c'(t),c''(t),c'''(t)]}{\|c'(t)\times c''(t)\|^2}.$$

Η $c$ είναι επίπεδη $\Leftrightarrow [c'(t),c''(t),c'''(t)]=0,\ \forall t.$

$$\Leftrightarrow \langle c'(t)\times c''(t),\ c'''(t)\rangle=0$$

$C'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, f'''(t))$

$\langle C'(t) \times C''(t), C'''(t) \rangle = 0, \forall t \Leftrightarrow \boxed{f'''(t) + f'(t) = 0, \forall t}$

Έτσι η $f(t)$ είναι γραμμ. συνδ. δηλαδή $f(t) = a_0 + a_1\cos t + a_2 \sin t$

**Άσκηση**: Έστω καμπύλη $C(s)$ του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και καμπυλότητα $k(s) > 0, \forall s \in I$ έχει κύριο κάθετο: $\vec{n}(s) = (\sin s, 0, \cos s), s \in I$

i) Να αποδειχθεί ότι έχει σταθερή καμπυλότητα και σταθερή στρέψη.

ii) Αν $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C(0) = (0,0,0)$ και $\vec{t}(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ τότε να βρεθεί η $C$.

Λύση

i) $\dot{\vec{n}}(s) = (\cos s, 0, -\sin s) \Leftrightarrow -k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s) = (\cos s, 0, -\sin s)$

$\Rightarrow -\dot{k}(s)\vec{t}(s) - k(s)\dot{\vec{t}}(s) + \dot{\tau}(s)\vec{b}(s) + \tau(s)\dot{\vec{b}}(s) = (-\sin s, 0, -\cos s)$

$\Leftrightarrow -\dot{k}(s)\vec{t}(s) - k^2(s)\vec{n}(s) + \dot{\tau}(s)\vec{b}(s) - \tau^2(s)\vec{n}(s) = -\vec{n}(s)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\dot{k}(s) = 0 \\ -k^2(s) - \tau^2(s) = -1, \forall s \\ \dot{\tau}(s) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k(s) = \text{σταθ.} \\ k^2(s) + \tau^2(s) = 1 \\ \tau = \text{σταθ.} \end{array}\right.$$

ii) $\tau(s) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{n}(s) \Rightarrow \dot{\vec{t}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, 0, \cos s)$

$$\Rightarrow \int_0^s \dot{\vec{t}}(u)du = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^s \sin u\, du, 0, \int_0^s \cos u\, du\right)$$

$\vec{t}(s) - \vec{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s + 1, 0, \sin s)$

$$\Rightarrow \vec{t}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\cos s, 0, \sin s)$$

$$\Rightarrow \dot{c}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\cos s, 0, \sin s)$$

$$\Rightarrow \int_0^s \dot{c}(u)du = \ldots \Leftrightarrow c(s) - c(0) = \ldots$$

Άσκηση: (σπίτι)

Δίνονται οι καμπύλες $c, \tilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με
$c(t) = (t + \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$,
$\tilde{c}(t) = (2\cos t, 2\sin t, -2t)$
Να εξετάσετε εάν είναι γεωμ. ισότιμες.

Υπόδειξη: $\tilde{c} = T \circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, $T = T_v \circ A$, $A \in O(3)$

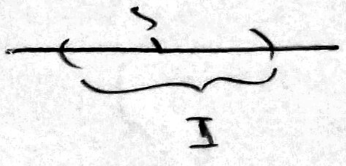
$s = \tilde{s}$, $k(t) = \tilde{k}(t) > 0$, $\tau(t) = \ldots = \tilde{\tau}(t)$

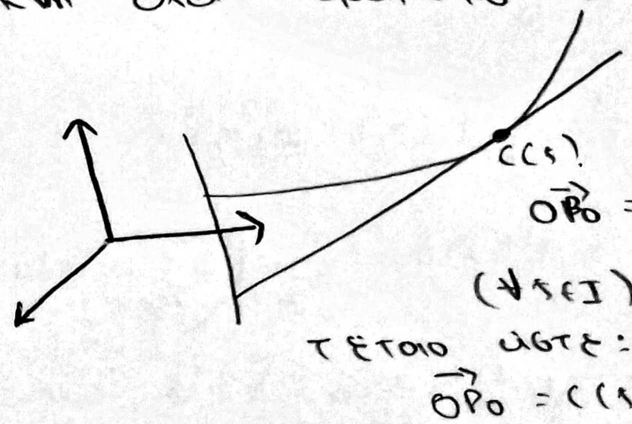
~o~o~o~o~o~o

Άσκηση: Αποδείξτε ότι εάν όλες οι εφαπτόμενες μιας κανονικής καμπύλης διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε η καμπύλη είναι ευθεία (ή τμήμα της).

Λύση

Υποθέτω ότι η καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$




$\dot{c}(s) = \vec{t}(s)$

$\vec{OP_0} = c(s) + \lambda(s)\vec{t}(s)$

$(\forall s \in I)(\exists \lambda(s))$

τέτοιο ώστε:

$\vec{OP_0} = c(s) + \lambda(s)\vec{t}(s)$ (*)

$$\langle \vec{OP}, \vec{t}(s)\rangle = \langle c(s), \vec{t}(s)\rangle + \lambda(s) \Rightarrow$$

$$\lambda(s) = \langle \vec{OP_0}, \vec{t}(s)\rangle - \langle c(s), \vec{t}(s)\rangle$$

$\Rightarrow$ η συνάρτηση $\lambda(s)$ είναι λεία.

Παραγωγίζω το $*$ : $0 = \dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{t}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{t}}(s)$

$$\Leftrightarrow 0 = \vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{t}(s) + \underline{\lambda(s)k(s)\vec{n}(s)} \Leftrightarrow$$

$$0 = (1+\dot{\lambda}(s))\vec{t}(s) + \lambda(s)\dot{k}(s)\vec{n}(s) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(s) = -1 \\ \lambda(s)k(s) = 0 \end{cases}, \forall s \in I \Rightarrow k(s) = 0$$

ΛΑΘΟΣ

A

! Στη σχέση A, στο σημείο ⓐ έχω λάθος διότι όταν παραγωγίζω το $*$ έχω φτάσει στο σημείο

$$0 = \dot{c}(s)\dot{\lambda}(s)\vec{t}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{t}}(s)$$

Θα αποδείξω ότι $k(s)=0$, $\forall s \in I$. Έστω ότι $\exists s_0 \in I : k(s_0) > 0$

$\xrightarrow[\text{συνέχεια}]{\text{λόγω}}$ $k(s) > 0$, $\forall s \in (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$. Τότε για το

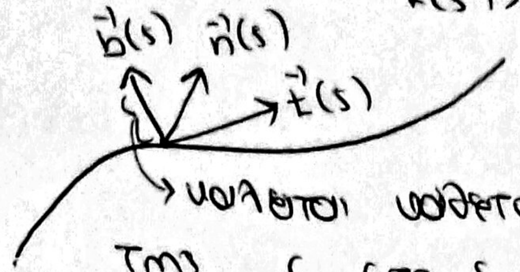
$c|_{(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)}$ ορίζεται το πλαίσιο Frenet. Εργάζομαι όπως στο $(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$ : $0 = \vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{t}(s) + \lambda(s)c(s)\vec{n}(s) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}(s) = -1 \\ \lambda(s)c(s) = 0 \end{cases}, \forall s \in (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lambda(s) = 0, \forall s \in ($$

~~[illegible]~~

Ορολογία: $\kappa(s)>0, \forall s$




κάθετο επίπεδο της $C$ στο $s$.

**Άσκηση**: Αν όλα τα κάθετα επίπεδα μιας κανονικής καμπύλης με παντού θετική καμπυλότητα διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε η καμπύλη είναι σφαιρική.

**Λύση**

Η διανυσματική εξίσωση του καθέτου επιπέδου στο $s$ είναι $\vec r = c(s)+\lambda \vec n(s)+\mu \vec b(s)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Από υπόθεση $(\forall s\in I)(\exists \lambda(s), \mu(s)\in\mathbb{R})$:

$$\boxed{\vec{OP_0} = c(s)+\lambda(s)\vec n(s)+\mu(s)\vec b(s), \forall s\in I} \quad (**)$$

Πολλαπλασιάζεται εσωτερικά με $\vec n(s), \vec b(s)$. Βρίσκω:

$$\begin{cases} \lambda(s) = \langle \vec{OP_0}, \vec n(s)\rangle - \langle c(s), \vec n(s)\rangle \\ \mu(s) = \langle \vec{OP_0}, \vec b(s)\rangle - \langle c(s), \vec b(s)\rangle \end{cases}$$

Παραγωγίζω την (**): $0=\vec t(s)+\dot\lambda(s)\vec n(s)+\lambda(s)\left(-\kappa(s)\vec t(s)+\tau(s)\vec b(s)\right)$

$+ \dot\mu(s) b(s) - \mu(s)\tau(s)\vec n(s)$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 1-\lambda(s)\kappa(s)=0 \\ \dot\lambda(s)-\mu(s)\tau(s)=0 \quad ,\forall s\in I \\ \dot\mu(s)+\lambda(s)\tau(s)=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(s)\kappa(s)=1 \\ \dot\lambda(s)=\mu(s)\tau(s) \\ \dot\mu(s)=-\lambda(s)\tau(s) \end{cases}$$

$d(c(s),P_0) = \| c(s)-\vec{OP} \| = \sqrt{\lambda^2(s)+\mu^2(s)}$. Αρκεί να $\lambda^2(s)+\mu^2(s)=$ σταθ.

$(\lambda^2(s)+\mu^2(s))^{\circ} = 2\lambda(s)\dot\lambda(s)+2\mu(s)\dot\mu(s) =$

$= 2\lambda(s)\mu(s)\tau(s) - 2\mu(s)\lambda(s)\tau(s)$

$=0$

Άρα όντως $\lambda^2(s)+\mu^2(s)=$ σταθ.